$$-\frac{1}{2}\delta^q_t A^a_{n+1[\sigma} A^{n+1}_{|a|\gamma]} \quad (p,q,s=\overline{0,n};\ a,b,c=\overline{m+1,n};\ \alpha=\overline{1,m}).$$

Заметим, что тензор $A^q_{p\sigma\gamma}$ каждой паре направлений $v,w\in L_m$ сопоставляет центропроективное преобразование гиперплоскости Γ_n в себя с центром в точке A_0 :

$$A(v,w)=\{A^q_{p\sigma\gamma}v^\sigma w^\gamma\}. \tag{10}$$

Геометрическая характеристика этого преобразования такая же, как и преобразования $R(v,w)$ в ([4], (8)).

Заметим с учетом ([1], (21), (24),(25)), что проективитет (10) разбивается на два подпроективитета:

1) центропроективное преобразование m-плоскости L_m в себя с центром в точке A_0 :

$$\overset{(1)}{A}(v,w)=\{A^{\bar\beta}_{\alpha\sigma\gamma}v^\sigma w^\gamma\}, \tag{11}$$

который геометрически характеризуется следующим образом:

$$X\in L_m \Rightarrow Y=\overset{(1)}{A}(v,w)X=L_m\cap[A(v,w)X\cup\Gamma_{n-m-1}],\ \forall v,w\in L_m;$$

2) проективитет $(n-m-1)$-плоскости Γ_{n-m-1} в себя:

$$\overset{(2)}{A}(v,w)=\{A^\beta_{a\sigma\gamma}v^\sigma w^\gamma\} \tag{12}$$

такой, что

$$Z\in\Gamma_{n-m-1}\Rightarrow V=\overset{(2)}{A}(v,w)Z=\Gamma_{n-m-1}\cap[A(v,w)Z\cup L_m],\ \forall v,w\in L_m.$$

Из ([1], (28)-(32)) и (9) следует, что на оснащенных m-поверхностях выполняются следующие состношения:

$$S^1_m \text{ или } S^2_m:\ A^\alpha_{0\sigma\gamma}=0;\quad S^3_m \text{ или } S^4_m:\ A^a_{\alpha\sigma\gamma}=0;$$

$$S_{m,\tau}:\ A^{\alpha_1}_{\alpha_2\sigma\gamma}=0,\ A^a_{\alpha_2\sigma\gamma}=0;\quad S^{1234}_m:\ A^q_{p\sigma\gamma}=0.$$

Поэтому с учетом (9)-(12) и ([1], (2), (24) (31), (12)) имеет место

Т е о р е м а 3. Линейное подпространство Γ_{n-m-1} неподвижно при проективитетах $A(v,w),\forall v,w\in L_m$ в каждой точке $A_0\in S^1_m$ | $A_0\in S^2_m$. Линейное подпространство $\Gamma_{m-\tau}$ неподвижно при проективитетах $A(v,w),\forall v,w\in L_m$ в каждой точке $A_0\in S_{m,\tau}$. Аффинная связность A расслоения $A_{m,n}$ локально-плоская в каждой точке $A_0\in S^{\alpha}_m$. Точка $A_0\in S_m$ неподвижна при проективитетах $A(v,w),\forall v,w\in L_m$.

Библиографический список

1. И в л е в Е.Т. Об одной классификации оснащенных многомерных поверхностей проективного пространства // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1991. Вып.22. С.49-56.

2. Е в т у ш и к Л.Е., Л у м и с т е Ю.Г., О с т и а н у Н.М., Ш и р о к о в А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1979. Т.9. С.7-246.

3. Л у м и с т е Ю.Г. Канонические расслоения над пространствами орбит и внутренние связности // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1973. Т.4. С.285-307.

4. И в л е в Е.Т. О тангенциально-вырожденных расслоениях $P_{m,n}$ // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1984. Вып.15. С.32-37.

УДК 514.75

КОНГРУЭНЦИЯ ПАР КОНИК СО СПЕЦИАЛЬНЫМИ СВОЙСТВАМИ ФОКАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ АССОЦИИРОВАННЫХ КВАДРИК

Л.Г.К о р с а к о в а

(Калининградский государственный университет)

В пространстве P_3 исследуется конгруэнция пар коник C_1,C_2 с несовпадающими плоскостями, имеющих пару общих точек, и ассоциированная с ней конгруэнция квадрик, на каждой квадрике которой фокальное многообразие [1] содержит конику C_1 конгруэнции (C_1). Изучен частный класс конгруэнций, в которых поверхность, описанная вершиной репера, является огибающей для семейства плоскостей коник C_1 .

Трехмерное проективное пространство P_3 отнесем к подвижному реперу $R=\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$, где A_1 и A_2 - общие точки коник C_1 и C_2, A_3 и A_4 - полюсы прямой A_1A_2 соответственно относительно коник C_1 и C_2 . При надлежащей нормировке вершин репера уравнения коник C_1 и C_2 в репере R запишутся в виде:

$$f_1\equiv(x^3)^2-2x^1x^2=0,\ x^4=0;\quad f_2\equiv(x^4)^2-2x^1x^2=0,\ x^3=0. \tag{1}$$

Деривационные формулы репера R имеют вид $dA_\alpha=\omega^\beta_\alpha A_\beta$ $(\alpha,\beta,\gamma=1,2,3,4)$, причем формы Пфаффа ω^β_α удовлетворяют структурным уравнениям $D\omega^\beta_\alpha=\omega^\gamma_\alpha\wedge\omega^\beta_\gamma$ и условию $\omega^\alpha_\alpha=0$. Считая, что плоскости коник C_1 и C_2 описывают двумерные многообразия, примем формы ω_1^4 и ω_2^4 за базисные и обозначим $\omega_i=\omega_i^4$, где индексы i,j,k меняются от 1 до 2, $i\neq j$ и по этим индексам суммирование не производится.

Рассмотрим однопараметрический пучок квадрик, которому принадлежат все коники C_1 и C_2 конгруэнций (C_1) и (C_2) . Уравнение этого пучка в репере R имеет вид:

$$\mathcal{F}\equiv(x^3)^2+(x^4)^2-2x^1x^2+2cx^3x^4=0. \tag{2}$$

При каждом фиксированном C мы получаем квадрику Q , которая в общем случае описывает конгруэнцию.

Назовем конгруэнцию пар коник, имеющих две общие точки, конгруэнцией $\mathcal{D}_0$, если: 1) коника C_1 входит в фокальное многообразие квадрики Q конгруэнции (Q) ; 2) поверхность (A_3) является огибающей для семейства плоскостей коник C_1 .

Так как коника C_1 принадлежит фокальному многообразию квадрики $Q\in(Q)$, то

$$d\mathcal{F}\big|_{x^4=0}=2f_1. \tag{3}$$

Имеем:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}d\mathcal{F}&=(\theta-\omega_3^3)\mathcal{F}+(x^4)^2(\omega_3^3-\omega_4^4-c\omega_4^3)+x^3x^4\big(c(\omega_3^3-\omega_4^4)-\omega_4^3\big)+\\&+x^1x^4(\omega_4^2-c\omega_1^3-\omega_1)+x^2x^4(\omega_4^1-c\omega_2^3-\omega_2)+x^1x^2(\omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_3^3)+\\&+x^1x^3(\omega_3^2-\omega_1^3-c\omega_1)+x^2x^3(\omega_3^1-\omega_2^3-c\omega_2)+(x^1)^2\omega_1^2+(x^2)^2\omega_2^1,\end{aligned} \tag{4}$$

где $D\theta=0$. Учитывая, что поверхность (A_3) – огибающая для семейства плоскостей коник C_1 , и используя формулы (3), (4), будем иметь:

$$\omega_3^4=0,\ \omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_3^3=0,\ \omega_i^j=0,\ \omega_3^i-\omega_j^3-c\omega_j=0. \tag{5}$$

Замыкая уравнения (5), получим следующие квадратичные уравнения:

$$\begin{gathered}\omega_3^1\wedge\omega_1+\omega_3^2\wedge\omega_2=0,\quad \omega_i^3\wedge\omega_3^j+\omega_i\wedge\omega_4^j=0,\\ 3(\omega_1^3\wedge\omega_3^1+\omega_2^3\wedge\omega_3^2)+\omega_1\wedge\omega_4^1+\omega_2\wedge\omega_4^2=0,\ (\omega_4^3-4c\omega_3^3)\wedge\omega_i=0.\end{gathered} \tag{6}$$

Система пфаффовых уравнений конгруэнции $\mathcal{D}_0$ с учетом (6) приводится к виду:

$$\begin{cases}\omega_i^j=0,\quad \omega_1^3=\Gamma_1^{3k}\omega_k,\ \omega_2^3=\Gamma_2^{31}\omega_1+\Gamma_1^{31}\omega_2,\ \omega_3^i=\omega_j^3+c\omega_j,\\ \omega_4^i=c\omega_j^3+a\omega_j,\ \omega_3^4=0,\ \omega_4^4=-3\omega_3^3,\ \omega_4^3=4c\omega_3^3,\\ \omega_3^3=h^k\omega_k,\quad dc=0,\quad da=8\omega_3^3(c^2-a).\end{cases} \tag{7}$$

Из анализа системы (7) следует, что конгруэнции $\mathcal{D}_0$ существуют и определяются с произволом двух функций двух аргументов.

Т е о р е м а 1. Конгруэнции $\mathcal{D}_0$ обладают следующими геометрическими свойствами: 1) фокусы луча A_1A_2 прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) гармонически делят точки A_1 и A_2 ; 2) координатные плоскости $(A_i A_3 A_4)$ являются касательными плоскостями к поверхности (A_i) ; 3) пара прямолинейных конгруэнций (A_3A_4) и (A_1A_2) односторонне расслояема в направлении от (A_3A_4) к (A_1A_2) ; 4) точки A_i являются фокальными точками коник C_2 ; 5) торсы конгруэнций (A_1A_2) и (A_3A_4) соответствуют; 6) коники C_1 конгруэнции (C_1) принадлежат инвариантной квадрике S , уравнение которой имеет вид:

$$\Phi\equiv(x^3)^2+a(x^4)^2-2x^1x^2+2cx^3x^4=0;$$

7) все квадрики Q конгруэнции (Q) касаются одной квадрики S вдоль коник C_1 ; 8) квадрика S тогда и только тогда является конусом, когда конгруэнция (C_1) коник C_1 расслояема к прямолинейной конгруэнции (A_3A_4) ; 9) фокальное многообразие квадрики $Q\in(Q)$ состоит из коники C_1 и двух точек пересечения с квадрикой Q прямой

$$(a-1)x^1+4(1-c^2)h^1x^4=0,\quad (a-1)x^2+4(1-c^2)h^2x^4=0,$$

проходящей через характеристическую точку A_3 .

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Фокусы $\lambda A_1+\mu A_2$ луча A_1A_2 конгруэнции (A_1A_2) находятся из уравнения $\lambda^2\Gamma_1^{32}-\mu^2\Gamma_2^{31}=0$, откуда следует утверждение теоремы.

2) Имеем: $dA_i=\omega_i^i A_i+\omega_i^3 A_3+\omega_i A_4$.

3) Уравнения

$$\begin{gathered}\omega_4^1\wedge\omega_1^3+\omega_4^2\wedge\omega_2^3=0,\quad \omega_1\wedge\omega_3^1+\omega_2\wedge\omega_3^2=0,\\ \omega_3^1\wedge\omega_1^3+\omega_3^2\wedge\omega_2^3-\omega_4^1\wedge\omega_1-\omega_4^2\wedge\omega_2=0,\end{gathered}$$

характеризующие расслоение от конгруэнции (A_3A_4) к (A_1A_2) , тождественно удовлетворяются в силу (7).

4) Следует из системы уравнений для определения фокальных точек коник C_2 :

$$f_2=0,\ x^3=0,\ df_2=0,\ dx^3=0.$$

5) Торсы конгруэнций (A_3A_4) и (A_1A_2) определяются одним и тем же уравнением $\omega_1^3\omega_2-\omega_2^3\omega_1=0$.

6) Так как $\Phi\big|_{x^4=0}=(x^3)^2-2x^1x^2=f_1$, то коника C_1 принадлежит квадрике Q . Поскольку $d\Phi=(\theta-\omega_3^3)\Phi,\ D\theta=0$, то квадрика Q инвариантная.

7) Полюс плоскости коники C_1 относительно квадрик Q и S есть одна и та же точка $M=A_4-cA_3$, следовательно, все квадрики $Q\in(Q)$ касаются неподвижной квадрики S вдоль коник C_1 . Из 2) и 7) следует, что прямые A_1A_2 и A_3A_4 полярно сопряжены отно-

сительно квадрик Q и инвариантной квадрики S.

8) Система квадратичных уравнений, характеризующих расслоение [2] от конгруэнции (C_1) коник C_1 к конгруэнции (A_3A_4), в силу (7) сводится к одному уравнению

$$(a-c^2)\,\omega_2\wedge\omega_1=0. \tag{8}$$

Квадрика S вырождается в конус, если выполняется условие

$$a-c^2=0. \tag{9}$$

Утверждение теоремы следует из (8), (9) и неравенства $\omega_2\wedge\omega_1\neq 0$.

9) Имеем: $d\mathfrak{F}=\lambda\mathfrak{F}+\mathfrak{F}_1\omega_1+\mathfrak{F}_2\omega_2$,

где
$$\mathfrak{F}_1=x^4\left(4x^4(1-c^2)n^1+(a-1)x^1\right),$$
$$\mathfrak{F}_2=x^4\left(4x^4(1-c^2)n^2+(a-1)x^2\right).$$

Фокальное многообразие квадрики $Q\in(Q)$ определяется системой $\mathfrak{F}=0,\ \mathfrak{F}_1=0,\ \mathfrak{F}_2=0$, откуда следует утверждение теоремы.

Рассмотрим ассоциированные с конгруэнцией $\mathcal{D}_0$ конгруэнции конусов – касательных конусов к квадрике Q с вершинами в точках $M=A_4-cA_3$, A_3 и A_4. Уравнения касательных конусов в репере $R=\{A_\alpha\}$ имеют вид:

$$Q_M\equiv(x^3)^2-2x^1x^2+c^2(x^4)^2+2cx^3x^4=0,$$
$$Q_3\equiv(1-c^2)(x^4)^2-2x^1x^2=0, \tag{10}$$
$$Q_4\equiv(1-c^2)(x^3)^2-2x^1x^2=0. \tag{11}$$

Линия пересечения конусов (10) и (11) определяется системой уравнений

$$(x^4)^2-(x^3)^2=0,\quad (1-c^2)(x^3)^2-2x^1x^2=0,$$

т.е. это пара коник C_3, C_4

$$\begin{cases} x^4-x^3=0,\\ (1-c^2)(x^3)^2-2x^1x^2=0; \end{cases}\qquad \begin{cases} x^4+x^3=0,\\ (1-c^2)(x^3)^2-2x^1x^2=0, \end{cases}$$

плоскости которых пересекают прямую A_3A_4 в точках A_3+A_4, A_3-A_4.

В силу системы (7) имеем:

$$dM=(a-c^2)(\omega_2A_1+\omega_1A_2)-3\omega_3^3M,$$

а асимптотические линии на поверхностях (A_3) и (M) определяются одним и тем же уравнением $\omega_3^1\omega_1+\omega_3^2\omega_2=0$. Доказана

Т е о р е м а 2. Для конгруэнции $\mathcal{D}_0$ справедливы свойства: I) плоскости коник C_3, C_4 пересекают прямую A_3A_4 в точках, гармонически делящих вершины репера A_3 и A_4; 2) поверхность (M) является огибающей для семейства плоскостей (A_1A_2M); 3) асимптотические линии на поверхностях (M) и (A_3) соответствуют.

Библиографический список

1. М а л а х о в с к и й В.С., М а х о р к и н В.В. Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1974. Т.6. С.113-134.

2. М а л а х о в с к и й В.С. Расслояемые пары конгруэнций фигур // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1971. Т.3. С.193-220.

УДК 514.75

КОНГРУЭНЦИИ ЭКВИДИСТАНТНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ И ЭКВИДИСТАНТ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

В.С.М а л а х о в с к и й

(Калининградский государственный университет)

Получены структурные формы эквидистантной поверхности и эквидистанты в интерпретации Кэли-Клейна геометрии Лобачевского. Исследованы фокальные многообразия конгруэнции эквидистантных поверхностей и эквидистант. Доказано, что конгруэнция эквидистантных поверхностей имеет в общем случае две собственные фокальные поверхности, а конгруэнция эквидистант – четыре. Рассмотрены некоторые подклассы конгруэнций эквидистант.

I. Пусть Q_0 – невырожденная нелинейчатая квадрика в трехмерном проективном пространстве $\mathcal{P}_3$. Примем ее за абсолют пространства Лобачевского Λ_3. В интерпретации Кэли-Клейна (см. [1]) точки пространства Λ_3 интерпретируются внутренними точками абсолюта, прямые – хордами абсолюта, а точки, лежащие на абсолюте Q_0, являются несобственными точками расширенного пространства Λ_3.

Пусть α – произвольная плоскость пространства Λ_3 (внутренняя часть сечения абсолюта Q_0 плоскостью пространства $\mathcal{P}_3$). Перпендикуляр, опущенный из точки $M\in\Lambda_3$ на плоскость α, есть хорда, лежащая на прямой MA, где A – полюс плоскости α относительно абсолюта Q_0.

Так как эквидистантная поверхность (эквидистанта) характеризуется ортогональностью ко всем прямым связки (пучка) расходящихся прямых (прямых, перпендикулярных соответственно одной плоскости или одной прямой), то эквидистантная поверхность

7 Зак. 1399